JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **144**, 46–63 (1997)
ARTICLE NO. FU962995

Caractérisation des convoluteurs de Schwartz des groupes de Lie nilpotents

Semi Dhieb et Jean Ludwig

Université de Metz, Département de Mathématiques et d'Informatique, Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex, France

Received June 10, 1995; accepted January 15, 1996

Nous donnons dans ce papier une nouvelle caractérisation des convoluteurs de Schwartz pour un groupe de Lie nilpotent G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Nous indiquons

View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

We present a new characterization of Schwartz multipliers on a nilpotent Lie group G with Lie algebra $\mathfrak{g}$. We use this characterization to give a sufficient condition for a function $\varphi \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ to be the Fourier transform of a Schwartz multiplier and we indicate a simpler condition in the case of the Heisenberg group. © 1997 Academic Press

0. INTRODUCTION

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie et soit $S(V)$ l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur V. Notons $\mathscr{M}S(V)$, l'ensemble des endomorphismes continus E de $S(V)$, vérifiant

$$E(l_x f) = l_x(Ef), \qquad \forall x \in V, \quad \forall f \in S(V),$$

où

$$l_x f(y) = f(y - x), \qquad x, y \in V.$$

À l'endomorphisme E, on associe une distribution tempérée sur V, D_E, définie par

$$\langle D_E, f\rangle = E\tilde{f}(0), \qquad f \in S(V).$$

Il s'ensuit que

$$Ef(x) = l_{-x} Ef(0) = E(l_{-x} f)(0) = \langle D_E, l_x \tilde{f}\rangle := (D * f)(x),$$

0022-1236/97 $25.00
Copyright © 1997 by Academic Press
All rights of reproduction in any form reserved.

où

$$\tilde{f}(y) = f(-y), \qquad y \in V.$$

Réciproquement, si $D \in S^*(V)$, alors

$$E_D : f \mapsto D * f$$

est une application de $S^*(V)$ dans l'espace des fonctions de classe C^∞ sur V. Une question qui se pose: *Quelle condition faut-il avoir sur la distribution D pour que E_D appartienne à $\mathscr{M}S(V)$?* La réponse est donnée en termes de la transformée de Fourier. Pour $f \in S(V)$, la transformée de Fourier de f, $\hat{f}$, est définie sur V^*, l'espace dual de V par:

$$\hat{f}(\xi) = \int_V f(x)\, e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle}\, dx, \qquad \xi \in V^*.$$

L'application $f \mapsto \hat{f}$ établie un isomorphisme entre $S(V)$ et $S(V^*)$ et permet de faire correspondre à une distribution tempérée D sur V, l'élément $\hat{D}$ de $S^*(V^*)$, défini par:

$$\langle \hat{D}, f \rangle := \langle D, \hat{f} \rangle, \qquad f \in S(V).$$

Schwartz [8] a montré que pour $D \in S^*(V)$, E_D appartient à $\mathscr{M}S(V)$ si et seulement si $\hat{D}$ est une fonction de classe C^∞ sur V^*, à croissance modérée ainsi que toutes ses dérivées. En outre, dans ce cas on a:

$$(D * f)^\wedge(\xi) = \hat{D}(\xi)\, \hat{f}(\xi), \qquad \forall \xi \in V^*.$$

Soit maintenant G un groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Pour un tel groupe, l'application exponentielle est un difféomorphisme. Nous pouvons donc identifier le groupe G avec son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et la multiplication de groupe sur $G = \mathfrak{g}$ est alors donnée par la loi de Campbell–Baker–Hausdorff

$$X \cdot Y = X + Y + \tfrac{1}{2}[X, Y] + \tfrac{1}{12}[X, [X, Y]] + \cdots, \qquad X, Y \in \mathfrak{g}, \qquad (0)$$

qui est en fait polynomiale ici, comme G est nilpotent. Remarquons que si Z est dans le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$, alors, pour tous X, Y dans $\mathfrak{g}$,

$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + Z.$$

L'espace de Schwartz $S(G)$ peut être défini comme étant l'image de $S(\mathfrak{g})$ via l'application exponentielle. Notons $S^*(G)$ son espace dual, l'espace des distributions tempérées sur G.

Soit $f \in S(G)$. Notons

$$l_x f(y) = f(x^{-1}y), \quad r_x f(y) = f(yx) \qquad \text{et} \qquad \tilde{f}(y) = f(y^{-1}), \quad x, y \in G.$$

Le produit de convolution à gauche (respectivement à droite) d'une distribution $D \in S^*(G)$ par une fonction de Schwartz f est défini par

$$D * f(x) = \langle D, l_x \tilde{f} \rangle \ \text{(respectivement } f * D(x) = \langle D, r_{x^{-1}} \tilde{f} \rangle), \qquad x \in G.$$

Alors si $\tilde{D}$ est défini par $\langle \tilde{D}, f \rangle = \langle D, \tilde{f} \rangle$, $f \in S(G)$, on a que

$$(D * f)\tilde{} = \tilde{f} * \tilde{D}. \tag{1}$$

Pour $f \in S(G)$, la transformée de Fourier de f, $\hat{f}$, est définie sur $\mathfrak{g}^*$, espace dual de $\mathfrak{g}$ comme étant la transformée de Fourier euclidienne de $f \circ \exp$.

Pour $X \in \mathfrak{g}$, définissons la distribution

$$\langle X, f \rangle = \frac{d}{dt} f(\exp(tX)) \,|_{t=0}, \qquad f \in C^\infty(G).$$

Alors $L_X(f)(y) \stackrel{\text{déf.}}{=} X * f(y) = (d/dt)(f(\exp(-tX)y) \,|_{t=0}$ et $f * X(y) = (d/dt) f(y \exp(-tX))_{| t=0}$ et L_X est un opérateur aux dérivées partielles à coefficients polynomiaux sur G.

L'algèbre enveloppante $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ est par définition l'algèbre de convolution des distributions, dont le support est réduit à l'élément neutre e ou à l'ensemble vide. Elle est engendrée par la distribution de Dirac au point e et les éléments X de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{B} = \{X_1, ..., X_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$. Pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, soit $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} * \cdots * X_n^{\alpha_n} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Alors les X^α, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, forment une base de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. La transformation de $X \mapsto -X$ de $\mathfrak{g}$ se prolonge en un antiautomorphisme $U \mapsto \tilde{U}$ de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Pour $f \in C^\infty(G)$, $U, V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, on a alors

$$(U * V * f)\tilde{} = \tilde{f} * \tilde{V} * \tilde{U}. \tag{2}$$

Introduisons une notion de degré d_G sur l'espace des polynômes $\mathscr{P}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ adaptée à l'action de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Pour cela considérons la suite descendante

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g}_i = [\mathfrak{g}_{i-1}, \mathfrak{g}], \qquad i = 1, 2, ..., r.$$

Soient ϑ_0 un supplémentaire de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}$ et pour tout $i = 1, ..., r-1$, choisissons un sous-espace ϑ_i de $\mathfrak{g}_i$, supplémentaire de $\mathfrak{g}_{i+1}$. Posons aussi $\vartheta_r = \mathfrak{g}_r \subset \mathfrak{z}$. On a alors,

$$\mathfrak{g} = \vartheta_0 \oplus \vartheta_1 \oplus \cdots \oplus \vartheta_{r-1} \oplus \vartheta_r. \tag{3}$$

Soient

$$X=\sum_{i=0}^{r} X_i \qquad \text{et} \qquad Y=\sum_{i=0}^{r} Y_i,$$

deux éléments de $\mathfrak{g}$, tels que, pour tout $i=0, ..., r$, X_i et Y_i sont dans ϑ_i, alors,

$$X \cdot Y = X_0 + Y_0 + \sum_{i=1}^{r} X_i + Y_i + C_i(X_0, ..., X_{i-1}, Y_0, ..., Y_{i-1}), \tag{4}$$

où $C_i(X_0, ..., X_{i-1}, Y_0, ..., Y_{i-1})$ appartient à ϑ_i, $i=1, ..., r$ et pour tous $i, j \in \{1, ..., r\}$, $i>j$, C_i est un polynôme de degré $\leqslant i-j$ en (X_j, Y_j).

Dans la suite, on convient que pour $i=0$, $C_0=(X_0, ..., X_{i-1}, Y_0, ..., Y_{i-1})=0$.

En vertu de (3), un élément ξ de $\mathfrak{g}^*$ s'écrit sous la forme: $\xi=(\xi_0, ..., \xi_r)$ avec $\xi_i \in \vartheta_i^*$.

Pour tout $j=0, ..., r$, soient n_j la dimension de ϑ_j et $\alpha_j=(\alpha_{j,1}, ..., \alpha_{j,n_j}) \in \mathbb{N}^{n_j}$. On note

$$X_j^{\alpha_j}=X_{j,1}^{\alpha_{j,1}} \cdots X_{j,n_j}^{\alpha_{j,nj}}, \quad X_j \in \vartheta_j \qquad \text{et} \qquad \xi_j^{\alpha_j}=\xi_{j,1}^{\alpha_{j,1}} \cdots \xi_{j,n_j}^{\alpha_{j,nj}}, \quad \xi_j \in \vartheta_j^*,$$

où $X_{j,k}$ (respectivement $\xi_{j,k}$) est la $k^{\text{ième}}$ composante de X_j (respectivement de ξ_j) dans une base $\mathfrak{B}_j=\{b_{j,k}\}_k$ de ϑ_j choisie arbitrairement (respectivement dans sa base duale).

Définissons par récurrence sur $j=0, ..., r$,

$$m_0=1, \qquad m_j=\sum_{i<j} (j-i) \cdot m_i+1.$$

Pour un monôme $X^\alpha=X_0^{\alpha_0} \cdots X_r^{\alpha_r}$ soit

$$d_G(X^\alpha)=m_0\,|\alpha_0|+\cdots m_r\,|\alpha_r| \tag{5}$$

et pour un polynôme $P=\sum_\alpha c_\alpha X^\alpha$, soit

$$d_G(P)=\max_{c_\alpha \neq 0} d_G(X^\alpha). \tag{6}$$

Alors pour $P, Q \in \mathscr{P}(\mathfrak{g})$ on a que $d_G(P \cdot Q)=d_G(P)+d_G(Q)$. Si maintenant $X \in \mathfrak{g}$, $\xi \in \vartheta_j^*$, nous obtenons que

$$X * \xi(Y) = \frac{d}{dt}\,\xi(-tX \cdot Y)_{|\,t=0} = \xi\left(\frac{d}{dt}(-tX \cdot Y)\right)\bigg|_{t=0}$$

$$= -\xi(X_j) + \xi\left(\frac{d}{dt}\,C(-tX_0, ..., -tX_{j-1}, Y_0, ..., Y_{j-1})\bigg|_{t=0}\right)$$

$$= -\xi(X) + Q_j(X, Y_0, ..., Y_{j-1}),$$

où Q_j est un polynôme de degré $\leqslant j$ en Y_0, $j-1$ en $Y_1, ...,$ de degré 1 en Y_{J-1}. Donc $d_G(X * \xi) \leqslant m_0 \cdot j + m_1 \cdot (j-1) + \cdots + m_{j-1} \cdot 1 < m_j = d_G(\xi)$. En faisant une récurrence sur $|\alpha|$ nous voyons que

$$\begin{aligned}
d_G(X * \xi^\alpha) = d_G(X * \xi^{\beta+\delta}) &= d_G(X * \xi^\beta \xi^\delta + \xi^\beta X * \xi^\delta) \\
&= \max(d_G(X * \xi^\beta \xi^\delta), d_G(\xi^\beta X * \xi^\delta)) \\
&= \max(d_G(X * \xi^\beta) + d_G(\xi^\delta), d_G(\xi^\beta) + d_G(\xi^\delta)) \\
&< \max(d_G(\xi^\beta) + d_G(\xi^\delta), d_G(\xi^\beta) + d_G(\xi^\delta)) \\
&= \max(d_G(\xi^{\beta+\delta}), d_G(\xi^{\beta+\delta})) = d_G(\xi^\alpha),
\end{aligned}$$

comme L_X est une dérivation. Ainsi, pour tout polynôme $P \in \mathscr{P}(\mathfrak{g})$,

$$d_G(X * P) < d_G(P). \tag{7}$$

Nous appelons dans la suite $d_G(P)$ le degré gradué de P.

0.1. Définition. Une distribution tempérée $D \in S^*(G)$ est dite un convoluteur à gauche (respectivement à droite) si pour tout $f \in S(G)$, $D * f$ (respectivement $f * D$) appartient à $S(G)$. Un convoluteur qui est à la fois à gauche et à droite est dit un convoluteur bilatère ou simplement un convoluteur.

Si D est un convoluteur à gauche, alors $\tilde{D}$ est un convoluteur à droite d'après (1).

Toute fonction de Schwartz f sur G nous donne un convoluteur D_f:

$$\langle D_f, g \rangle = \int_G f(x)\, g(x)\, dx, \qquad g \in S(G).$$

Alors

$$D_f * g = f * g, \qquad g * D_f = g * f.$$

En outre, toute distribution de G à support compact est un convoluteur.

Les convoluteurs à gauche (donc aussi à droite) sont caractérisés dans [1].

0.2. PROPOSITION. *Une distribution tempérée D sur G est un convoluteur à gauche si et seulement s'il existe pour chaque $k \in \mathbb{N}$ une famille finie $\{u_j, U_j\} \subset L^1(G) \cap L^\infty(G) \times \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ telle que $\int_G (1 + \|\log(x)\|^2)^k \, |u_j(x)|^2 \, dx \leqslant 1$ pour tout j où* log *désigne l'inverse de la fonction exponentielle et telle que*

$$D * f = \sum_j u_j * U_j * f, \qquad f \in S(G). \tag{8}$$

Dans [4], on trouve une caractérisation des convoluteurs centraux; c'est-à-dire, les convoluteurs D vérifiant $D * f = f * D$, $\forall f \in S(G)$. Cette caractérisation a été conjecturée par R. Howe [3]: Une distribution $D \in S^*(G)$ est un convoluteur central si et seulement si sa transformée de Fourier $\hat{D}$ définie sur $S(\mathfrak{g}^*)$ par

$$\langle \hat{D}, g \rangle = \langle D, \hat{g} \rangle, \qquad g \in S(\mathfrak{g}^*),$$

où

$$\hat{g}(\exp X) = \int_{\mathfrak{g}^*} g(\xi) \, e^{-2\pi i \langle \xi, X \rangle} \, d\xi, \qquad X \in \mathfrak{g},$$

est une fonction de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}^*$ à croissance modérée ainsi que toutes ses dérivées.

La transformée de Fourier d'une distribution du type D_f, $f \in S(G)$, est donnée par la fonction $(f \circ \exp)^\wedge$:

$$\langle \hat{D}_f, g \rangle = \int_{\mathfrak{g}^*} (f \circ \exp)^\wedge \, (\xi) \, g(\xi) \, d\xi, \qquad g \in S(\mathfrak{g}^*).$$

Soit $\{f_k\}_k$ une unité approchée de $S(G)$. Si D est un convoluteur, alors

$$D * f = \lim_{k \to \infty} D * (f_k * f) = \lim_{k \to \infty} g_k * f \qquad \text{où} \quad g_k = D * f_k \in S(G).$$

Ceci nous dit que l'ensemble des convoluteurs D, dont la transformée de Fourier $\hat{D}$ est donnée par une fonction C^∞, est fortement dense dans l'espace de tous les convoluteurs. Remarquons aussi que la transformée de Fourier d'une distribution à support compact est une fonction analytique. Pourtant la transformée de Fourier au sens des distributions d'un convoluteur n'est pas en général une fonction. Nous traitons à la fin de ce papier un tel exemple.

Réciproquement, si ϕ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}^*$, quelle condition doit-elle vérifier pour quelle soit la transformée de Fourier au sens des distributions d'un convoluteur? Nous exprimons dans ce cas une condition suffisante et nous donnons une condition plus simple dans le cas du groupe de Heisenberg.

L'exemple du paragraphe 3 a été suggéré par D. Müller. Les auteurs tiennent à le remercier.

1. LES CONVOLUTEURS

Donnons d'abord une nouvelle caractérisation des convoluteurs.

1.1. Théorème. *Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe nilpotent. Une distribution tempérée D sur G est un convoluteur, si et seulement s'il existe une constante $d>0$ telle que pour tout polynôme P sur G, il existe une famille finie $(Q_j, V_j) \subset \mathscr{P}(\mathfrak{g}) \times \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, telle que $d_G(Q_j) \leqslant d$ et telle que*

$$|\langle D, Pf\rangle| \leqslant \sum_j \|Q_j \cdot f * V_j\|_2, \qquad f \in S(G).$$

Preuve. Soit $D \in S^*(G)$ un convoluteur. Alors, d'après 0.2, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$D * f = \sum_j u_j * U_j * f, \qquad f \in S(G),$$

pour certains éléments $U_j \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, $u_j \in L^2(G)$ avec $\int_G (1+\|\log(x)\|^2)^k |u_j(x)|^2 \, dx \leqslant 1$. Donc

$$\begin{aligned}\langle D, Pf\rangle &= \sum_j \int_G u_j(x^{-1})(Pf) * \tilde{U}_j(x)\, dx \\ &= \sum_j \sum_\alpha \int_G u_j(x^{-1})\, P_{j,\alpha}(x)\, f * V_{j,\alpha}(x)\, dx \\ &\qquad \text{(d'après la règle de Leibnitz)}\end{aligned}$$

où $P_{j,\alpha} \in \mathscr{P}(\mathfrak{g})$ avec $d_G(P_{j,\alpha}) \leqslant d_G(P)$ et où $V_{j,\alpha} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ avec $\deg(V_{j,\alpha}) \leqslant \deg(U_j)$ pour tout j, α. Donc si k est assez grand, $P_{j,\alpha} \cdot \tilde{u}_j \in L^2(G)$, d'après la propriété de u_j relative à k, pour tout j, α, et donc la condition du théorème est vérifiée avec $Q_j = 1$.

Réciproquement, supposons que $D \in S^*(G)$ satisfasse à la condition du théorème. Soit $f \in S(G)$. Pour montrer que $D * f \in S(G)$ il suffit de prouver que $P \cdot (D * f) * V$ est borné pour tout P polynôme $\in \mathscr{P}(\mathfrak{g})$ et pour tout $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Comme $(D * f) * V = D * (f * V)$, nous pouvons admettre que $V = 1$.

Or $P \cdot D * f(x) = P(x)\langle D, l_x \tilde{f}\rangle = \langle D, P(x)\, l_x \tilde{f}\rangle$, $x \in G$. Comme

$$\begin{aligned}P(x)\, l_x \tilde{f}(y) &= P(x)\, f(y^{-1}x) = P(y \cdot y^{-1}x)\, f(y^{-1}x) \\ &= \sum_\beta P_\beta(y)\, Q_\beta(y^{-1}x)\, f(y^{-1}x)\end{aligned}$$

pour tout $y \in G$, pour certains polynômes P_β, Q_β, nous voyons que

$$P \cdot l_x \tilde{f} = \sum_\beta P_\beta \cdot l_x((Q_\beta f)^{\sim}).$$

En outre nous avons que

$$|\langle D, P_\beta l_x((Q_\beta f)^{\sim})\rangle| \leqslant \sum_j \|Q_{\beta, j} \cdot l_x((Q_\beta f)^{\sim}) * V_{\beta, j}\|_2,$$

où $d_G(Q_{j, \beta}) \leqslant d$, pour certains $V_{\beta, j} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Ainsi

$$|P(x)\, D * f(x)| = \left|\sum_\beta \langle P_\beta D, l_x((Q_\beta f)^{\sim})\rangle\right| \leqslant \sum_{\beta, j} \|Q_{\beta, j} \cdot l_x((Q_\beta f)^{\sim}) * V_{\beta, j}\|_2$$

$$\leqslant \sum_{\beta, j} \|l_{x^{-1}}(Q_{\beta, j} \cdot (Q_\beta f)^{\sim}) * V_{\beta, j}\|_2 \leqslant |Q(x)|$$

où Q est un polynôme en x de degré $\leqslant n \cdot d_G(Q_{\beta, j}) \leqslant n \cdot d$, pour tout β, j où $n = \dim G$. Donc, $|P(x)\, D * f(x)| \leqslant |Q(x)|$, pour tout $x \in G$ et ainsi $D * f$ est à décroissance rapide. ∎

Nous allons maintenant indiquer une condition suffisante pour qu'une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathfrak{g})$ soit la transformée de Fourier d'un convoluteur.

1.2. DÉFINITION. Soit $s_r = 0$, $s_{r-1} = 1$ et pour tout j de $r-2$ à 0,

$$s_j = m_0 \cdot (r-j) + m_1 \cdot (r-j-1) + \cdots + m_{r-j-1} \cdot 1 + s_{j+1}.$$

Pour $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_r) \in \mathbb{N}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{N}^{n_r}$, posons

$$\|\, |\alpha|\, \| = s_0\, |\alpha_0| + \cdots + s_{r-1}\, |\alpha_{r-1}|.$$

1.3. LEMME. *Soit $\mathfrak{B} = \{X_{j, k}\}$ une base de $\mathfrak{g}$, telle que $X_{j, k} \in \vartheta_j$ pour tous j, k. Soit $\partial_{j, k}$ la dérivée partielle dans la direction $X_{j, k}$. Alors,*

$$\partial_{j, k} = L_{X_{j, k}} + \sum_{k'} P_{(j, k), j+1, k'} L_{X_{j+1, k'}} + \cdots + \sum_{k'} P_{(j, k), r, k'} L_{X_{r, k'}},$$

où $P_{(j, k), l, k'}$ est un polynôme de degré gradué $\leqslant s_j$ pour tout $l > j$.

Preuve. En effet, pour tout $f \in C^\infty(G)$, $y \in G$,

$$L_{X_{j, k}} f(y) = \partial_{j, k} f(y) + \sum_{l > j, k'} \partial_{l, k'} f(y) \cdot \frac{d}{dt} C_{l, k'}(-tX_{j, k}, y)\,|_{t=0}.$$

où $C_{l,k'}(-tX_{j,k}, y) = \langle C_l(-tX_{j,k}, y), X_{l,k'}\rangle$, C_l étant définie par (4). Donc

$$\partial_{j,k} f(y) = L_{X_{j,k}} f(y) - \sum_{l>j,k'} \partial_{l,k'} f(y)\, P'_{l,k'}(y)$$

où $P'_{l,k'}$ est un polynôme de degré $l-j$ en Y_0, $l-j-1$ en $Y_1, ..., 1$ en Y_{l-j-1}, donc

$$d_G(P'_{l,k'}) \leqslant m_0 \cdot (l-j) + m_1 \cdot (l-j-1) + \cdots + m_{l-j-1} \cdot 1.$$

En utilisant une hypothèse de récurrence sur j, nous voyons que

$$\partial_{j,k} = L_{X_{j,k}} + \sum_{l>j,k'} P_{l,k'} L_{X_{l,k'}},$$

où

$$d_G(P_{l,k'}) \leqslant \max_{l''>l',k'',l'''>l'',k''} d_G(P'_{l,k'} \cdot P_{(l'',k'')\,l''',k'''}) \leqslant d_G(P'_{l,k'}) + s_{j+1)} \leqslant s_j. \quad ▮$$

1.4. Corollaire. *Soit* $\alpha \in \mathbb{N}^{n_0} \times \cdots \times \mathbb{N}^{n_r}$. *Alors*

$$\partial^\alpha f = \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} P_\beta (U_\beta * f) = \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} P'_\beta (f * U'_\beta), \qquad f \in S(G),$$

où $U_\beta, U'_\beta \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ *de degré* $\leqslant |\alpha|$ *et où* P_β, P'_β *sont des polynômes de degré* $d_G(P_\beta) \leqslant \| \, |\alpha| \, \|$.

Preuve. Faisons une récurrence sur $|\alpha|$. Si $|\alpha| = 1$, on applique le lemme précédent. Supposons $|\alpha| > 1$. Alors $\partial^\alpha = \partial_{j,k} \circ \partial^{\alpha'}$ pour un $|\alpha'| = |\alpha| - 1$ et un $j \in \{0, ..., r\}$, $k \in \{1, ..., n_j\}$. Donc

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha &= \partial_{j,k} \circ \left(\sum_{|\beta| \leqslant |\alpha'|} P_\beta U_\beta \right) \\
&\qquad\qquad (\text{avec } d_G(P_\beta) \leqslant \| \, |\alpha'| \, \| \text{ et } \deg\,(U_\beta) \leqslant |\alpha'|) \\
&= \left(L_{X_{j,k}} + \sum_{l>j,k'} P_{l,k'} L_{X_{l,k'}} \right) \circ \left(\sum_{|\beta| \leqslant |\alpha'|} P_\beta U_\beta \right) \\
&= \sum_{l \geqslant j,k'} \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha'|} P_{l,k'} (L_{X_{l,k'}} \circ (P_\beta U_\beta)) \\
&= \sum_{l \geqslant j,k'} \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha'|} (P_{l,k'} P_\beta (L_{X_{l,k'}} \circ U_\beta) + P_{l,k'} (X_{l,k'} * P_\beta)\, U_\beta) \\
&= \sum_{l \geqslant j,k'} \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha'|} P'_\beta U'_\beta,
\end{aligned}$$

où $d_G(P'_\beta) \leqslant \| \, |\alpha'| \, \| + s_j = \| \, |\alpha| \, \|$ et $\deg\,(U'_\beta) \leqslant |\alpha'| + 1 = |\alpha|$. ▮

1.5. DÉFINITION. Soit $s=(s_0, ..., s_r)$ défini dans 1.2 et notons $C_s^\infty(\mathfrak{g}^*)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions C^∞ complexes φ à croissance modérée définies sur $\mathfrak{g}^*$, telles qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ et pour tout multi-indice $\alpha\in\mathbb{N}^{n_0}\times\cdots\times\mathbb{N}^{n_r}$, il existe $\beta=(\beta_0, ..., \beta_r)\in\mathbb{N}^{r+1}$ et une constante $C>0$, tels que

$$|\partial^{\delta+\alpha}\varphi(\xi)|\leqslant C(1+\|\xi_0\|^2)^{\beta_0/2}\cdots(1+\|\xi_r\|^2)^{\beta_r/2}\cdot((1+\|\xi\|)^2)^k, \qquad \xi\in\mathfrak{g}^*$$

pour tout $\delta\in\mathbb{N}^{n_0}\times\cdots\times\mathbb{N}^{n_r}$, tel que

$$d_G(X^\delta)=m_0\,|\delta_0|+\cdots+m_r\,|\delta_r|\leqslant s_0\beta_0+\cdots+s_{r-1}\beta_{r-1}=:\|\,|\beta|\,\|.$$

1.6. THÉORÈME. *Toute fonction $\varphi\in C_s^\infty(\mathfrak{g}^*)$ est la transformée de Fourier d'un convoluteur bilatère D_φ de $S(G)$.*

Preuve. Montrons que pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^{n_0}\times\cdots\times\mathbb{N}^{n_r}$,

$$|\langle D_\varphi, X^\alpha f\rangle|\leqslant\sum_j\|Q_j\cdot f*V_j\|_2, \qquad f\in S(G),$$

pour certains $Q_j\in\mathscr{P}(\mathfrak{g})$, de degré $\leqslant d$ pour un certain d et $V_j\in\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Or

$$\begin{aligned}\langle D_\varphi, X^\alpha f\rangle&=\int_{\mathfrak{g}^*}\varphi(\xi)\,\partial^\alpha\hat{f}(\xi)\,d\xi\\&=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathfrak{g}^*}\partial^\alpha\varphi(\xi)\,\hat{f}(\xi)\,d\xi\\&=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathfrak{g}^*}\frac{\partial^\alpha\varphi(\xi)}{\prod_{j=0}^r(1+\|\xi_j\|^2)^{[\beta_j/2]+k_j}}\\&\qquad\times\prod_{j=0}^r(1+\|\xi_j\|^2)^{[\beta_j/2]+k_j}\,\hat{f}(\xi)\,d\xi\\&\qquad\qquad\left(\text{où }\left[\frac{\beta_j}{2}\right]=\text{partie entière de }\frac{\beta_j}{2}\text{ et où }k_j=n_j+r+1\right)\\&=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathfrak{g}^*}\frac{\partial^\alpha\varphi(\xi)}{\prod_{j=0}^r(1+\|\xi_j\|^2)^{[\beta_j/2]+k_j}}\\&\qquad\times\left(\prod_{j=0}^r(1-\partial_j^2)^{[\beta_j/2]+k_j}f\right)^\wedge(\xi)\,d\xi\end{aligned}$$

où ∂_j^2 désigne le laplacien $\sum_k\partial_{j,k}^2$ de ϑ_j. D'après 1.4, nous pouvons écrire $\prod_{j=0}^r(1-\partial_j^2)^{[\beta_j/2]+k_j}f$ sous la forme $\sum_j P_j\cdot(\prod_{j=0}^r(1-\partial_j^2)^{k_j}f)*V_j$, où les P_j sont des polynômes de degré $d_G \leqslant \sum_{j=0}^{r-1} s_j \cdot 2[\beta_j/2] \leqslant \sum_{j=0}^{r-1} s_j \cdot \beta_j = \| \, |\beta| \, \|$. La fonction φ_β définie sur G par

$$\varphi_\beta(x) = \left(\frac{\partial^\alpha \varphi}{\prod_{j=0}^{r} (1 + \| \cdot \|^2)^{[\beta_j/2] + k_j}} \right)^{\wedge} (x)$$

est dans $L^2(G)$ ainsi que $X^\delta \cdot \varphi_\beta$, pour tout δ, tel que

$$d_G(X^\delta) = m_0 \, |\delta_0| + \cdots + m_r \, |\delta_r| \leqslant \| \, |\beta| \, \|,$$

du fait que $\varphi \in C_s^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Donc, pour tout j, la fonction $P_j \cdot \varphi_\beta \in L^2(G)$ et ainsi nous obtenons l'estimation suivante

$$|\langle D_\varphi, X^\alpha f \rangle| \leqslant \sum_j c_j \, \|((1 - \partial_j^2)^{k_j} f) * V_j\|_2,$$

pour certaines constantes c_j. Finalement

$$|\langle D_\varphi, X^\alpha f \rangle| \leqslant \sum_j \|Q_j \cdot f * V'_j\|_2,$$

pour certains $V'_j \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, $Q_j \in \mathscr{P}(\mathfrak{g})$, avec $d_G(Q_j) \leqslant \sum_{i=0}^{r-1} s_i \cdot (k_j)$. ∎

1.7. Exemples. (1) Toute fonction φ, qui est C^∞ sur $\mathfrak{g}^*$ et qui est telle que

$$|\partial^\delta \varphi(x)| \leqslant C_\delta (1 + \|\xi\|^2)^k, \qquad \xi \in \mathfrak{g}^*,$$

pour tout δ, pour une certaine constante C_δ, est contenue dans $C_s^\infty(\mathfrak{g}^*)$.

(2) Soit

$$\varphi(\xi) = e^{i \prod_{j=0}^{r-1} (1 + \|\xi_j\|^2)^{1/t_j} + 1/2}, \qquad \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

où les t_j sont des constantes. Alors

$$|\partial_0^{\delta_0 + \alpha_0} \circ \cdots \circ \partial_{r-1}^{\delta_{r-1} + \alpha_{r-1}} \varphi(\xi)| \leqslant C_{\delta, \alpha} \prod_{j=0}^{r-1} (1 + \|\xi_j\|^2)^{(\delta_j + \alpha_j)/t_j}, \qquad \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

Prenons pour tout j un $\beta_j = m = \max_k |\alpha_k|$. Alors, si $t_j \geqslant 1 + ((\sum_k s_k)/m_j)$ et pour δ tel que $\sum_j m_j \, |\delta_j| \leqslant \sum_j s_j \beta_j = (\sum_j s_j) \, m$, on a

$$\frac{|\delta_j + \alpha_j|}{t_j} \leqslant \frac{(|\delta_j| + m) \cdot m_j}{m_j + \sum_k s_k} \leqslant \frac{(\sum_k s_k) \, m + m_j \cdot m}{m_j + \sum_k s_k} = m = \beta_j.$$

Ainsi, pour de tels t_j, notre fonction φ est dans $C_s^\infty(\mathfrak{g}^*)$.

2. LE GROUPE DE HEISENBERG

Le groupe de Heisenberg H_n est le groupe d'éléments $(x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ muni d'une loi de multiplication définie par

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \tfrac{1}{2}[\langle x_1, y_2\rangle - \langle x_2, y_1\rangle])$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

On peut réaliser H_n comme étant l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n+2$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & I_n & y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad x = (x_1, ..., x_n) \quad \text{et} \quad y^t = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Son algèbre de Lie $\mathfrak{h}_n$ est engendrée par les éléments $X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n, Z$ avec

$$[X_i, Y_j] = \delta_{ij} Z.$$

(Les autres crochets sont ou bien nuls ou bien donnés par une antisymétrie ou une linéarité).

Pour plus de détails concernant ce groupe, nous envoyons le lecteur à [2], [6] et [7]. On sait aussi que tout groupe de Lie nilpotent de pas deux et dont le centre est de dimension un est de type Heisenberg ([4]).

Soient $\varphi \in L^2(\mathfrak{h}_n^*)$ et D_φ la distribution tempérée de H_n définie par

$$\langle D_\varphi, f\rangle = \langle \varphi, \hat{f}\rangle \qquad \forall f \in S(H_n)$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathfrak{h}_n} f(\exp(X))\, e^{-2\pi i\langle \xi, X\rangle}\, dX, \qquad \xi \in \mathfrak{h}_n^*.$$

Soit x un élément de H_n. Alors,

$$D_\varphi * f(x) = \langle D_\varphi, l_x \tilde{f}\rangle = \langle \varphi, (l_x \tilde{f})^\wedge\rangle = \int_{\mathfrak{h}_n^*} \varphi(\xi)(l_x \tilde{f})^\wedge(\xi)\, d\xi.$$

Dans la suite, nous identifions $\mathfrak{h}_n$ et H_n à $\mathbb{R}^{2n+1}$, $x = (x_1, x_2, t)$ (respectivement $y = (y_1, y_2, s)$) désignera un élément de H_n et $\xi = (\xi_1, \xi_2, \lambda)$ désignera un élément de $\mathfrak{h}_n^*$.

On a:

$$
\begin{aligned}
D_\varphi * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}\times\mathbb{R}^{2n+1}} \varphi(\xi)(l_x\tilde{f})(y)\, e^{-2\pi i\langle \xi,\, y\rangle}\, dy\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}\times\mathbb{R}^{2n+1}} \varphi(\xi)\, \tilde{f}(y)\, e^{-2\pi i\langle \xi,\, x\cdot y\rangle}\, dy\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}\times\mathbb{R}^{2n+1}} \varphi(\xi)\, \tilde{f}(y) \\
&\quad \times e^{-2\pi i[\langle \xi_1,\, x_1+y_1\rangle + \langle \xi_2,\, x_2+y_2\rangle + \lambda(s+t+1/2(\langle x_1,\, y_2\rangle - \langle x_2,\, y_1\rangle))]}\, dy\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \varphi(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \tilde{f}(y) \right. \\
&\quad \left. \times e^{-2\pi i(\langle y_1,\, \xi_1 - 1/2\lambda x_2\rangle + \langle y_2,\, \xi_2 + 1/2\,\lambda x_1 + \lambda s)}\, dy \right) e^{-2\pi i\langle \xi,\, x\rangle}\, d\xi.
\end{aligned}
$$

On en déduit alors que

$$
\begin{aligned}
D_\varphi * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \varphi(\xi)\,\hat{}\ \tilde{f}(\xi_1 - \tfrac{1}{2}\lambda x_2,\, \xi_2 + \tfrac{1}{2}\lambda x_1,\, \lambda)\, e^{-2\pi i\langle \xi,\, x\rangle}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \varphi(\xi_1 + \tfrac{1}{2}\lambda x_2,\, \xi_2 - \tfrac{1}{2}\lambda x_1,\, \lambda)\, (\tilde{f})\hat{}\ (\xi)\, e^{-2\pi i\langle \xi,\, x\rangle}\, d\xi.
\end{aligned}
$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et notons $C_s^{\infty,\,k}\mathfrak{h}_n^*)$, l'ensemble des fonctions φ appartenant à $C^\infty(\mathfrak{h}_n^*)$ et vérifiant la condition $(\mathscr{C}')$ suivante:

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$, *il existe* $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{N}^3$, $q_1 + q_2 < |\alpha_1 + \alpha_2|$ *et une constante positive* C *tels que pour tout* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \lambda) \in \mathfrak{h}_n^*$,

$$
|\partial^\alpha \varphi(\xi)| \leqslant C(1 + \|\xi\|^2)^k\, (1 + \|\xi_1\|^2)^{q_1/2}\, (1 + \|\xi_2\|^2)^{q_2/2}\, (1 + \lambda^2)^{q_3/2}.
$$

Dans la suite, nous supposons que $n = 1$. Le calcul est analogue pour les dimensions supérieures.

2.1. LEMME. *Pour tout élément* φ *de* $C_s^{\infty,\,0}(\mathfrak{h}_1^*)$, *pour toute fonction* f *dans* $S(H_1)$, *et pour tout multi-indice* α, *la fonction* $(D_{\partial^\alpha\varphi} * f)$ *est bornée.*

Preuve. Nous raisonnons par récurrence sur $|\alpha|$. Comme φ est bornée, $D_\varphi * f$ l'est aussi.

Soit $\alpha=(i, j, l)\in\mathbb{N}^3$. Il existe alors $q\in\mathbb{N}$ tel que

$$\varphi_{\alpha, q}=\frac{\partial^\alpha\varphi}{(1+\xi_1^2)^{(i-1)/2}\,(1+\xi_2^2)^{(j-1)/2}\,(1+\lambda^2)^q}$$

appartienne à $C_s^{\infty, 0}(\mathfrak{h}_1^*)$.

Soient x appartenant à H_1 et f dans $S(H_1)$. Alors,

$$\begin{aligned}(D_{\partial^\alpha\varphi} * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \partial^\alpha\varphi\left(\left(\xi_1+\frac{\lambda}{2}x_2, \xi_2-\frac{\lambda}{2}x_1, \lambda\right)\tilde{f}\right)^{\wedge}(\xi)\, e^{-2\pi i\langle\xi, x\rangle}\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3}\varphi_{\alpha, q}\left(\xi_1+\frac{\lambda}{2}x_2, \xi_2-\frac{\lambda}{2}x_1, \lambda\right)\left(1+\left(\xi_1+\frac{\lambda}{2}x_2\right)^2\right)^{(i-1)/2} \\ &\quad\times\left(1+\left(\xi_2-\frac{\lambda}{2}x_1\right)^2\right)^{(j-1)/2}(1+\lambda^2)^q\,(\tilde{f})^{\wedge}(\xi)\, e^{-2\pi i\langle\xi, x\rangle}\, d\xi.\end{aligned}$$

Pour montrer que $D_{\partial^\alpha\varphi} * f$ est bornée pour toute fonction f dans $S(H_1)$, il suffit de montrer que

$$B_{i', j'}(x)=\int_{\mathbb{R}^3}\varphi_{\alpha, q}\left(\xi_1+\frac{\lambda}{2}x_2, \xi_2-\frac{\lambda}{2}x_1, \lambda\right)x_2^{i'}x_1^{j'}(\tilde{f})^{\wedge}(\xi)\, e^{-2\pi i\langle\xi, x\rangle}\, d\xi$$

est bornée pour tout $i'\leqslant i-1$, $j'\leqslant j-1$. Or

$$\begin{aligned}B_{i', j'}(x) &= \sum_{\substack{m+n=j' \\ p+k=i'}} C_{\alpha, m, n}^{p, k}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_{\xi_1}^m\partial_{\xi_2}^p\,\varphi_{\alpha, q}\left(\xi_1+\frac{\lambda}{2}x_2, \xi_2-\frac{\lambda}{2}x_1, \lambda\right) \\ &\quad\times\partial_{\xi_1}^n\partial_{\xi_2}^k(\tilde{f})^{\wedge}(\xi)\, e^{-2\pi i\langle\xi, x\rangle}\, d\xi.\end{aligned}$$

Comme $\varphi_{\alpha, q}\in C_s^{\infty, 0}(\mathfrak{h}_1^*)$, on a d'après l'hypothèse de récurrence, que pour toute fonction $f\in S(H_1)$, la fonction,

$$D_{\partial_{\xi_1}^m\partial_{\xi_2}^p\varphi_{\alpha, q}} * f$$

est bornée pour tout $(m, p)\in\mathbb{N}^2$, $m\leqslant j-1$, $n\leqslant i-1$. Ce qui prouve que $B_{i', j'}$ est bornée. Par suite, $D_{\partial^\alpha\varphi} * f$ est bornée. ∎

2.2. Théorème. *Pour tout entier k, pour toute fonction φ appartenant à $C_s^{\infty, 0}(\mathfrak{h}_1^*)$, la distribution D_φ est un convoluteur pour $S(H_1)$.*

Preuve. Supposons que $k=0$. Soient $\varphi \in C_s^{\infty,0}(\mathfrak{h}_1^*)$ et $f \in S(H_1)$. Alors, pour tout $x=(x_1, x_2, t) \in H_1$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^3$, $U \in \mathfrak{U}(\mathfrak{h}_1)$,

$$x^\alpha(D_\varphi * f * U)(x) = \sum_{\gamma, \nu} \int_{\mathbb{R}^3} D^\gamma \varphi(\xi_1 + \tfrac{1}{2}\lambda x_2, \xi_2 - \tfrac{1}{2}\lambda x_1, \lambda) \hat{f}_\nu(\xi)\, e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi$$

où les fonctions f_ν sont dans $S(H_1)$.

Comme pour tout $\beta \in \mathbb{N}^3$, pour tout $f \in S(H_1)$, $D_{\partial^\beta \varphi} * f$ est bornée, on en déduit que $D_\varphi * f$ est dans $S(H_1)$.

Supposons que $k>0$ et soit φ un élément de $C_s^{\infty,k}(\mathfrak{h}_1^*)$. Alors, la fonction

$$\varphi_k = \frac{\varphi}{(1+\|\xi\|^2)^k}$$

appartient à $C_s^{\infty,0}(\mathfrak{h}_1^*)$. Par conséquent,

$$D_{\varphi_k} * f \in S(H_1), \qquad \forall f \in S(H_1).$$

Soit $x \in H_1$. On a:

$$\begin{aligned} D_\varphi * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_k(\xi_1 + \tfrac{1}{2}\lambda x_2, \xi_2 - \tfrac{1}{2}\lambda x_1, \lambda) \\ &\quad \times (1 + \|(\xi_1 + \tfrac{1}{2}\lambda x_2, \xi_2 - \tfrac{1}{2}\lambda x_1, \lambda)\|^2)^k \hat{f}(\xi)\, e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant 4k} c_{\alpha,\beta} x^\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi_1 + \tfrac{1}{2}\lambda x_2, \xi_2 - \tfrac{1}{2}\lambda x_1, \lambda) \\ &\quad \times \hat{f}_\beta(\xi)\, e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi. \end{aligned}$$

Comme φ_k est dans $C_s^{\infty,0}(\mathfrak{h}_1^*)$, $D_{\varphi_k} * f_\beta$ est dans $S(H_1)$ et par suite $D_\varphi * f$ l'est aussi. Ainsi D_φ est bien un convoluteur à gauche. Un calcul analogue montre que D_φ est aussi un convoluteur à droite. ▮

2.3. Exemple. Soit φ la fonction définie sur $\mathfrak{h}_1^*$ par

$$\varphi(\xi) = e^{i\|\xi\|^2}, \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2, \lambda) \in \mathbb{R}^3.$$

Il est clair que φ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathfrak{h}_1^*$ et à croissance modérée ainsi que toutes ses dérivées. Cependant, elle ne vérifie pas la condition $(\mathscr{C}')$ du théorème précédent. Nous allons montrer qu'elle ne définit pas un convoluteur pour $S(H_1)$. En effet, supposons que φ définisse un convoluteur D_φ et soient $f \in S(H_1)$ et $X(x_1, x_2, t) \in H_1$. Alors,

$$
\begin{aligned}
&D_\varphi * \tilde{f}(X)\\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\xi)\, f(Y)\, e^{-i\langle \xi,\, X \cdot Y\rangle}\, dY\, d\xi\\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi\left(\xi_1 - \frac{\lambda}{2}\, x_2,\, \xi_2 + \frac{\lambda}{2}\, x_1,\, \lambda\right) \hat{f}(\xi_1, \xi_2, \lambda)\, e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \lambda d)}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\lambda\\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^3} e^{i[(\xi_1 - (\lambda/2)\, x_2)^2 + (\xi_2 + (\lambda/2)\, x_1)^2 + \lambda^2]} \hat{f}(\xi_1, \xi_2, \lambda)\, e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \lambda t)}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\lambda\\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(\lambda^2/4)(x_1^2 + x_2^2)} e^{i\, \|\xi\|^2} e^{i\lambda(\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2)} \hat{f}(\xi_1, \xi_2, \lambda)\, e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \lambda t)}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\lambda\\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} e^{i(\lambda^2/4)(x_1^2 + x_2^2)}\\
&\qquad \times \left[\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\, \|\xi\|^2} \hat{f}(\xi_1, \xi_2, \lambda)\, e^{-i\lambda(\xi_1(x_1 + x_2) + \xi_2(x_2 - x_1))}\, d\xi_1\, d\xi_2 \right] e^{-i\lambda t}\, d\lambda\\
&\quad = \int_{\mathbb{R}} e^{i(\lambda^2/4)(x_1^2 + x_2^2)} [e^{i\, \|\xi\|^2} \hat{f}\,]^{\wedge\, 1,\, 2}\, (\lambda(x_1 + x_2), \lambda(x_2 - x_1), \lambda)\, e^{-i\lambda t}\, d\lambda.
\end{aligned}
$$

Soit f appartenant à $S(H_1)$ telle que

$$
\hat{f}(\xi) = e^{-i\, \|\xi\|^2} e^{-\pi\, \|\xi\|^2}, \qquad \xi \in \mathfrak{h}_1^*.
$$

Alors,

$$
[e^{i\, \|\xi\|^2} \hat{f}\,]^{\wedge\, 1,\, 2}\, (X) = e^{-\pi\, \|X\|^2}
$$

et

$$
[e^{i\, \|\xi\|^2} \hat{f}\,]^{\wedge\, 1,\, 2}\, (\lambda(x_1 + x_2), \lambda(x_2 - x_1), \lambda) = e^{-\pi\lambda^2 [2x_1^2 + 2x_2^2 + 1]}.
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
(D_\varphi * \tilde{f})^{\wedge\, 3}\, (x_1, x_2, 0) &= \int_{\mathbb{R}} (D_\varphi * \tilde{f})(x_1, x_2, t)\, dt\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\lambda^2/4)(x_1^2 + x_2^2)} e^{-\pi\lambda^2 [2x_1^2 + 2x_2^2] + 1} e^{-i\lambda t}\, d\lambda\, dt\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Par suite, $D_\varphi * \tilde{f}$ n'est pas dans $S(H_1)$.

3. UN CONVOLUTEUR QUI N'EST PAS DONNÉ PAR UNE FONCTION

Nous avons vu dans les paragraphes précédents des exemples de convoluteurs de Schwartz qui sont définis par des fonctions. La question qu'on se pose est la suivante: *Est-ce que, comme dans le cas abélien, tout convoluteur d'un groupe de Lie nilpotent est déterminé par une fonction*?

La réponse est négative comme on va le voir dans l'exemple suivant suggéré par D. Müller.

Considérons le groupe de Heisenberg H_1 muni de la structure définie dans le paragraphe précédent. Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞, à support compact et nulle sur un voisinage de zéro. Soit T la distribution tempérée sur H_1, définie par

$$\langle T, f \rangle := \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(0, 0, \lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda, \qquad f \in S(H_1).$$

Alors, T est un convoluteur pour $S(H_1)$. En effet, soient $X = (x_1, x_2, t) \in H_1$ et $f \in S(H_1)$. On a

$$\begin{aligned} T * f(X) = \langle T, l_X \tilde{f} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} (l_X \tilde{f})^\wedge\, (0, 0, \lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{H_1} \tilde{f}(X^{-1} \cdot Y)\, e^{-i\langle (0,0,\lambda),\, Y\rangle} \varphi(\lambda)\, dY\, d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{H_1} \tilde{f}(Y)\, e^{-i\langle (0,0,\lambda),\, X \cdot Y\rangle} \varphi(\lambda)\, dY\, d\lambda. \end{aligned}$$

Le groupe H_1 s'identifie à $\mathbb{R}^3$. On a donc

$$\begin{aligned} &T * f(X) \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(y_1, y_2, s)\, e^{-i\lambda(s + t + (1/2)\, x_2 y_2 - (1/2)\, x_2 y_1)} \varphi(\lambda)\, dy_1\, dy_2\, ds\, d\lambda \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(y_1, y_2, s)\, e^{i(\lambda/2)\, x_2 y_1}\, dy_1\, e^{-i(\lambda/2)\, x_1 y_2}\, dy_2\, e^{-i\lambda s}\, ds\, \varphi(\lambda)\, e^{-i\lambda t}\, d\lambda \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}} \hat{\tilde{f}}\left(-\frac{\lambda}{2} x_2, \frac{\lambda}{2} x_1, \lambda\right) \varphi(\lambda)\, e^{-i\lambda t}\, d\lambda. \end{aligned}$$

Il est clair alors que,

$$T * f \in S(H_1), \qquad \forall f \in S(H_1).$$

Ce qui prouve que T est un convoluteur à gauche. Un calcul analogue montre que T est aussi un convoluteur à droite.

Soient $f_1 \in S(\mathbb{R}^2)$ telle que $\hat{f}_1(0,0)=1$ et $f_2 \in S(\mathbb{R})$. Posons: $f = f_1 \otimes f_2$. On a donc:

$$\langle T, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_2(\lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda.$$

Supposons que T soit défini par une fonction ψ, alors

$$\langle T, f\rangle = \langle \psi, \hat{f}\rangle = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi_1, \xi_2, \lambda)\, \hat{f}_1(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2\right] \hat{f}_2(\lambda)\, d\lambda.$$

En identifiant ces deux égalités, il vient que

$$\varphi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi_1, \xi_2, \lambda)\, \hat{f}_1(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2, \qquad \forall f_1 \in S(\mathbb{R}^2).$$

Donc

$$\forall (\xi_1, \xi_2, \lambda) \in \mathbb{R}^3, \qquad \psi(\xi_1, \xi_2, \lambda) = \varphi(\lambda).$$

On en déduit que:

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda) \int_{\mathbb{R}^2} f_1(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall f_1 \in S(\mathbb{R}^2).$$

Par conséquent, la fonction φ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Corwin, Tempered distributions on the Heisenberg groups whose convolution with Schwartz class functions are Schwartz class, *J. Functional Anal.* **44**, No. 3 (1981), 328–347.
2. J. Dixmier, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents III, *Canadian J. Math.* **10** (1958), 321–348.
3. R. Howe, On a connection between nilpotent Lie groups and oscillatory integrals associated to singularities, *Pacific J. Math.* **73** (1977), 329–363.
4. J. W. Jenkins, A characterization of bi-invariant Schwartz space multipliers on nilpotent Lie groups, *Studia Mathematica* **XCII** (1989), 101–129.
5. G. L. Litvinov, Representations of groupes in locally convex spaces and topological group algebras, *Selecta Math. Sovietica* **7**, No. 2 (1988), 101–182.
6. L. Pukanszky, "Leçons sur les représentations des groupes," Dunod Paris, 1967.
7. C. Rockland, Hypoellipticity on the Heisenberg group-Representation-Theoretic criteria, *Trans. Amer. Math. Soc.* **240** (1978), 1–52.
8. L. Schwartz, Théorie des distributions. Tome II, Hermann Paris, 1959.